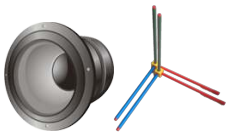
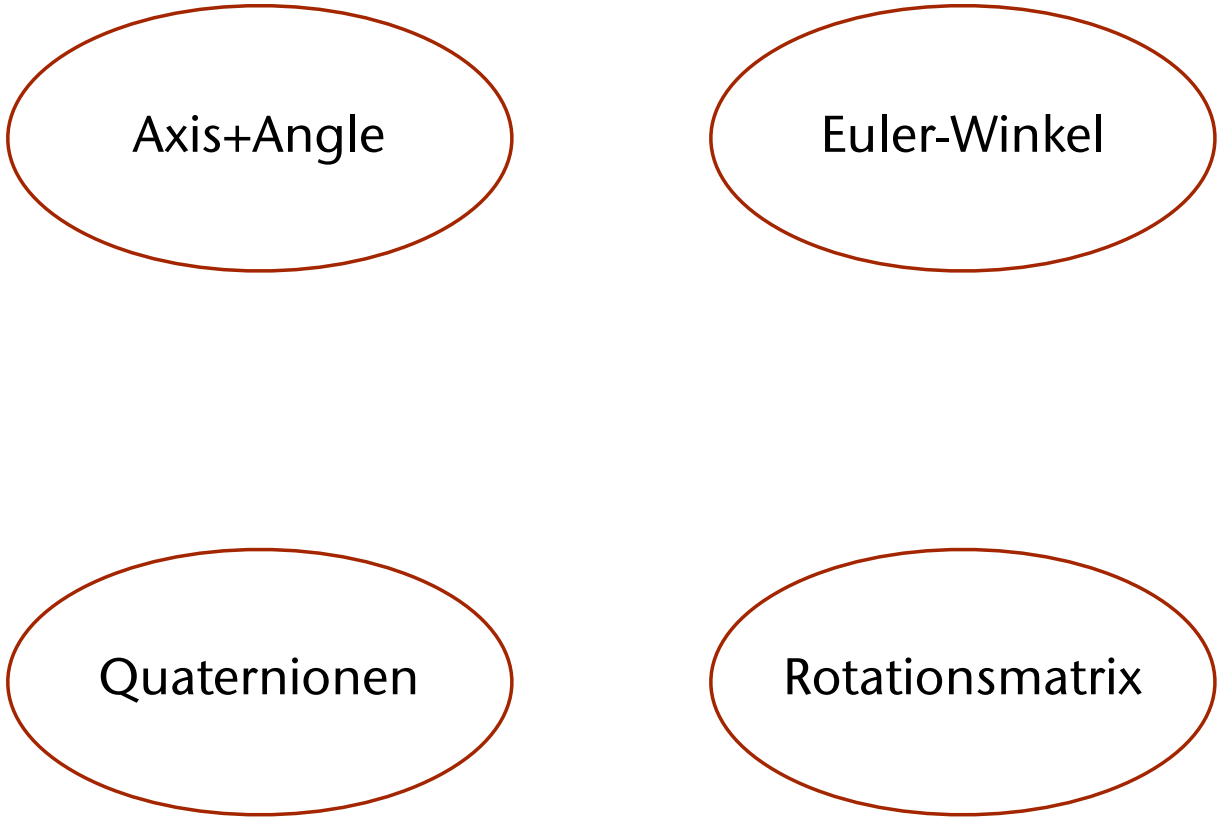
Computer-Graphik I
Rotationen

$$\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

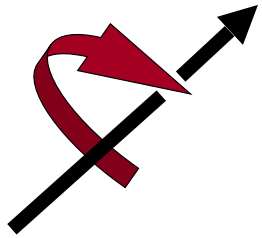
G. Zachmann
University of Bremen, Germany
cgvr.informatik.uni-bremen.de



Vier Darstellungen von allgemeinen Rotation



Darstellung: Achse + Winkel



- Intuitive Darstellung: $(\varphi,\mathbf{r})$
  - Meist mit der Nebenbedingung $\|\mathbf{r}\| = 1$
- Anzahl Freiheitsgrade allgemeiner Rotationen: 3 DOFs (*degrees of freedom*)
  - 2 DOFs für die Achse + 1 DOF für den Winkel
- Anmerkung: in der Robotik wird gerne die Variante verwendet, wo beliebig lang sein darf, und dabei wird

$$\varphi = \|\mathbf{r}\|$$

als Winkel interpretiert (damit benötigt man wieder nur einen 3D-Vektor)

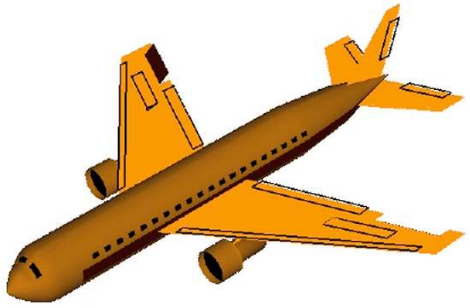
  - Bezeichnungen: Euler-Vektor, oder Rotationsvektor

Die Euler-Winkel

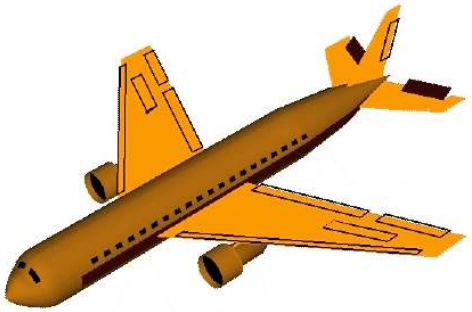
- Intuitive(?) Konstruktion einer beliebigen Rotation: Konkatenation aus 3 elementaren Rotationen — erst Rotation um X-, dann um Y-, dann um Z-Achse
- Diese Winkel heißen Euler-Winkel
- Häufige Variante im Maschinenbau:

$$R(r, p, y) = R_z(y)R_x(p)R_y(r)$$

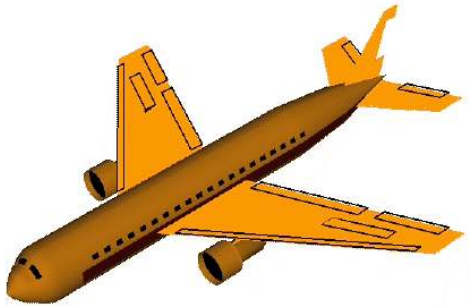
- Bezeichnung:
  roll, pitch, yaw (Schiff)
  roll, pitch, heading (Flugzeug)



Roll



Pitch

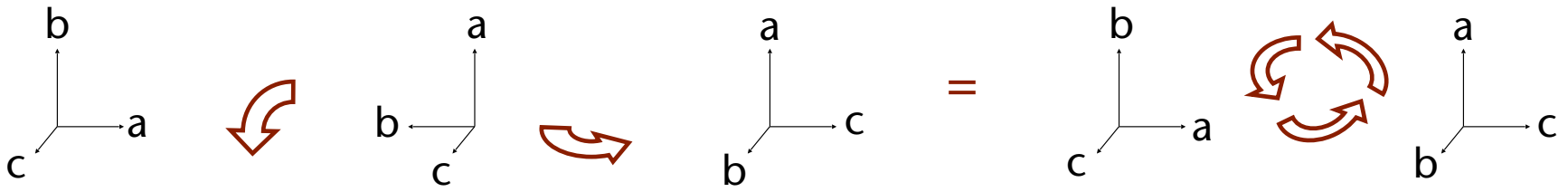


Yaw
(Heading)

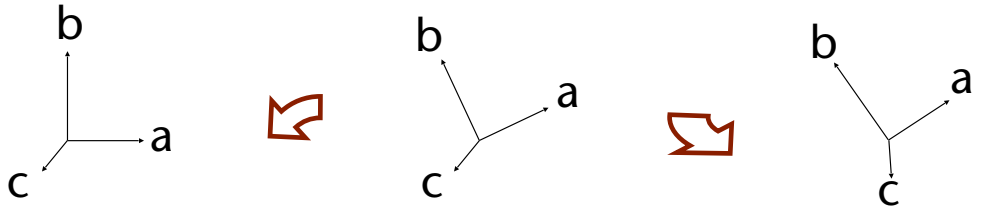
Spezifikation einer Rotation mittels Euler-Winkeln macht viele Probleme!!

1. Reihenfolge der Rotationen ist nicht festgelegt!
   - Oft *"roll, pitch, yaw"* — aber Zuordnung zu den Achsen nicht definiert!
   - Manchmal auch: z, x, z ! Oder ...
2. Führt manchmal zu Gimbal Lock!
3. Werte-Bereiche: für einen der Winkel ist der Bereich nur [-90, +90]
   - Sonst: Mehrfachüberdeckung von SO(3)
4. Rechnen (z.B. interpolieren oder mitteln) ist i.A. sinnlos und/oder unmöglich!

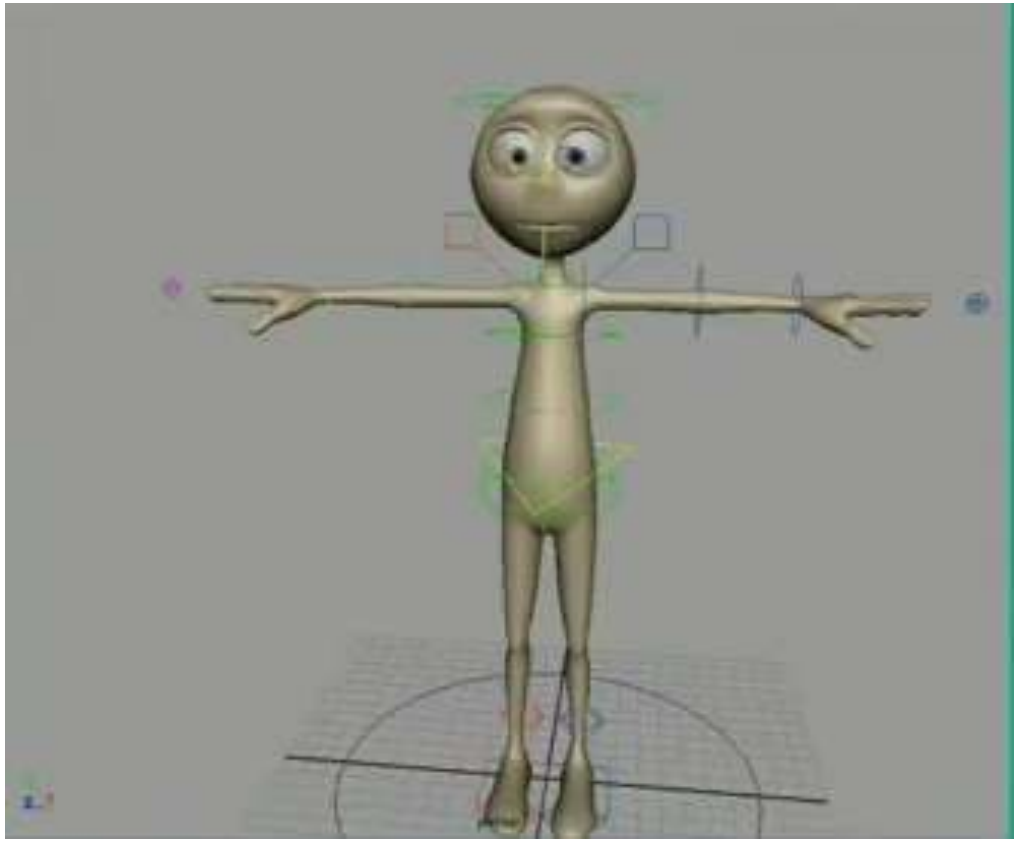
- Interpolation zwischen zwei Rotationen (Orientierungen) mittels Euler-Winkel liefert unerwünschte Resultate
- Beispiel:
  - Rotation von 90° um Z, dann 90° um Y = 120° um (1, 1, 1)

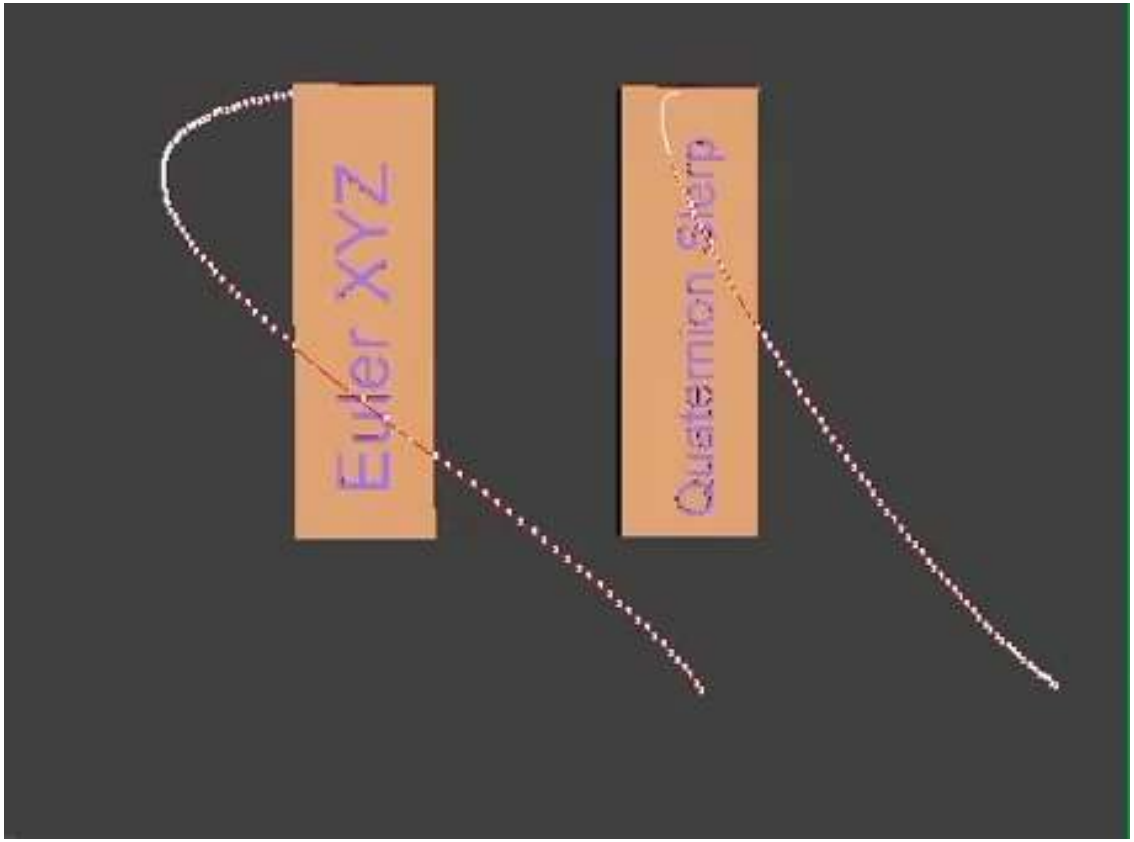


  - Rotation von 30° um Z, dann 30° um Y ≠ 40° um (1, 1, 1) !



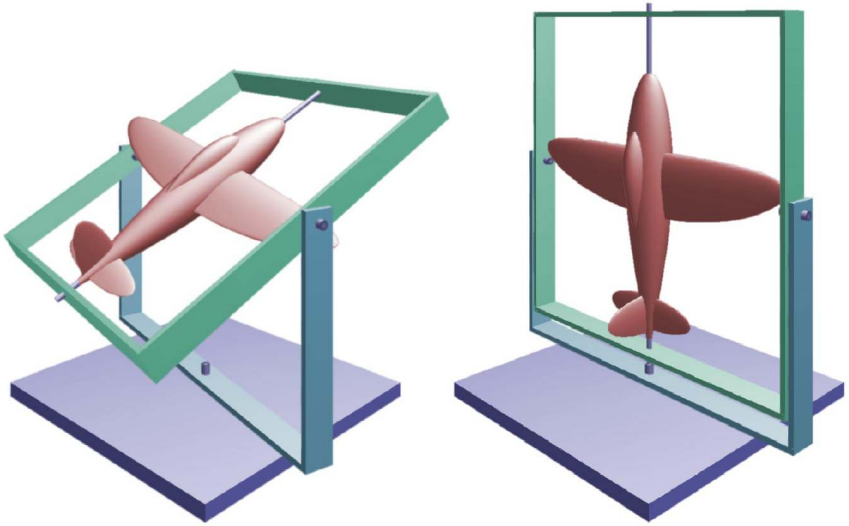
Beispiel für die unerwünschten Effekte bei Interpolation von Euler-Winkeln





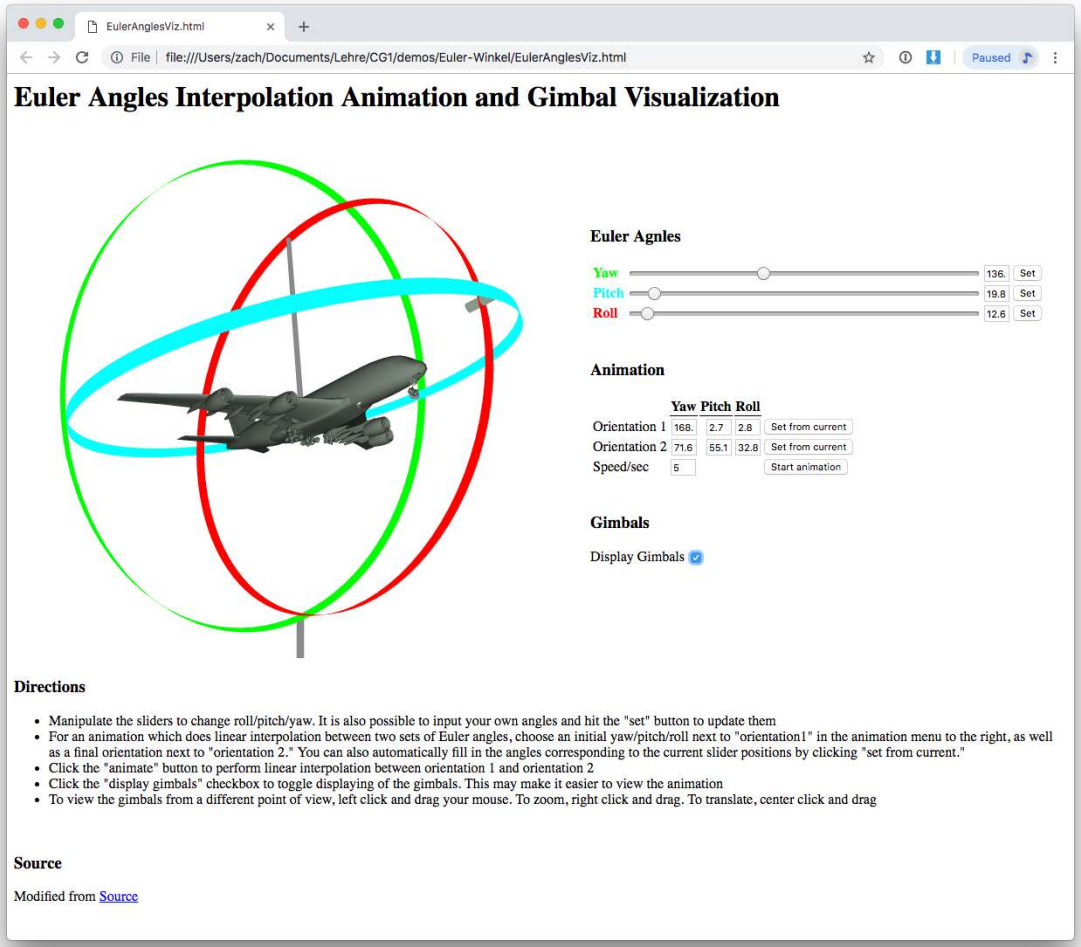
Der *Gimbal Lock*

- Immer dann, wenn 2 Achsen (fast) gleich sind
- Folgen: nur noch 2 Freiheitsgrade! (obwohl es immer noch 3 Parameter sind)
  - Rotation um eine der (lokalen) Flugzeugachsen geht nicht mehr!



4 Gimbals

Demo zu Interpolation und Gimbal Lock



Anekdote: Euler Angles in Spaceflight

- In den Apollo-Raketen wurde ein Kreiselkompass verwendet
  - (Basiert auf der Trägheit einer sich sehr schnell drehenden Masse)
- Kleine Anekdote dazu:

  About two hours after the Apollo 11 landing, Command Module Pilot Mike Collins had the following conversation with CapCom Owen Garriott:
  104:59:35 *Garriott*: Columbia, Houston. We noticed you are maneuvering very close to gimbal lock. I suggest you move back away. Over.
  104:59:43 *Collins*: Yeah. I am going around it, doing a CMC Auto maneuver to the Pad values of roll 270, pitch 101, yaw 45.
  104:59:52 *Garriott*: Roger, Columbia. (Long Pause)
  105:00:30 *Collins*: (Faint, joking) How about sending me a fourth gimbal for Christmas.

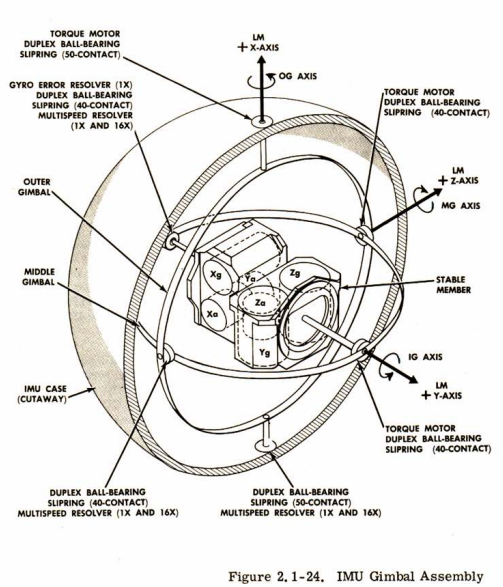


Figure 2.1-24. IMU Gimbal Assembly

- Um Gimbal-Lock zu vermeiden, wurde tatsächlich ein 4-ter Gimbal eingeführt!

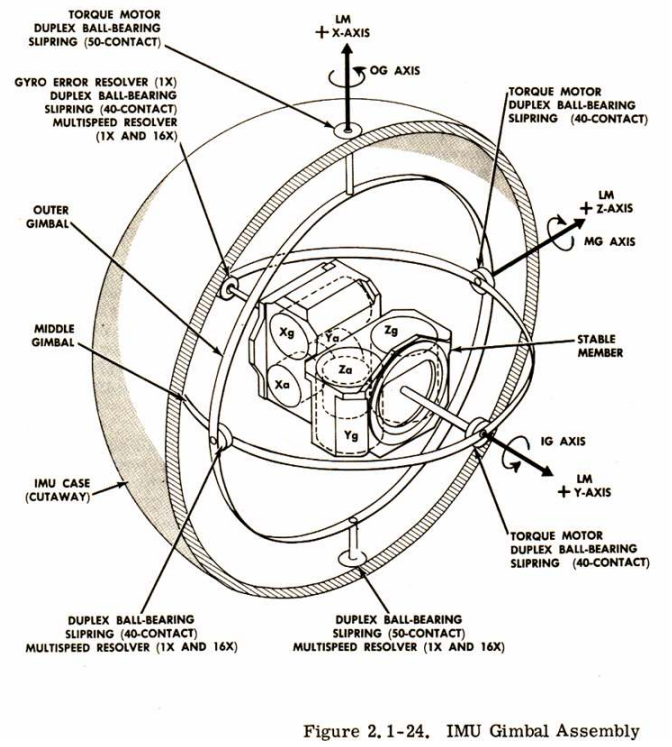
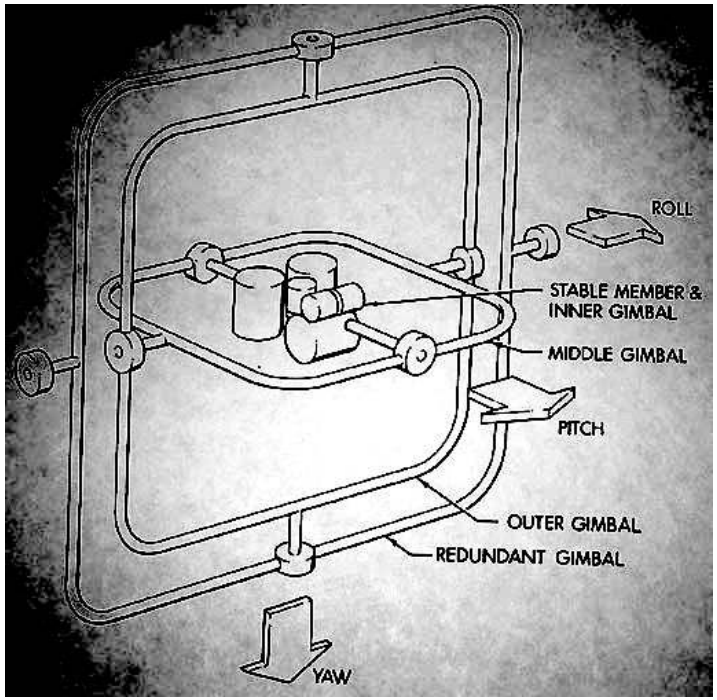


Figure 2.1-24. IMU Gimbal Assembly



Quelle: http://www.hq.nasa.gov/office/pao/History/alsj/gimbals.html

Matrix-Darstellung von Rotationen

- Gesucht: Rotationsmatrix zu gegebener Rotationsachse **r**
  (oBdA geht **r** durch den Ursprung)

1. Erzeuge neue Basis (**r**, **s**, **t**) (bestimme **s** und **t**, orthogonal zu **r**; siehe Kapitel "Kurze Wiederholung in Geometrie")
2. Transformiere alles, so daß die Basis (**r**, **s**, **t**) in die Standardbasis (**x**, **y**, **z**) übergeht
3. Rotiere mit Winkel θ um **x**-Achse
4. Transformiere zurück in die ursprüngliche Basis

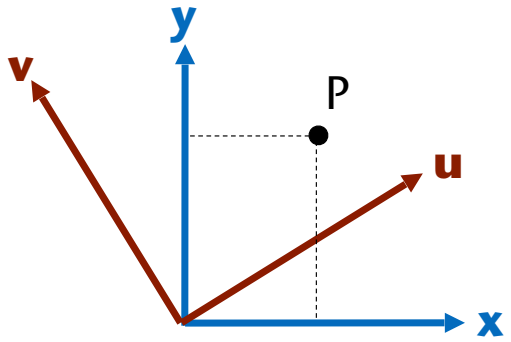
- Zusammen:

$$M = BR_x(\theta)B^{\mathsf{T}} \quad \text{mit} \quad B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{r} & \mathbf{s} & \mathbf{t} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Konstruktion einer Rotation aus Koordinatenachsen

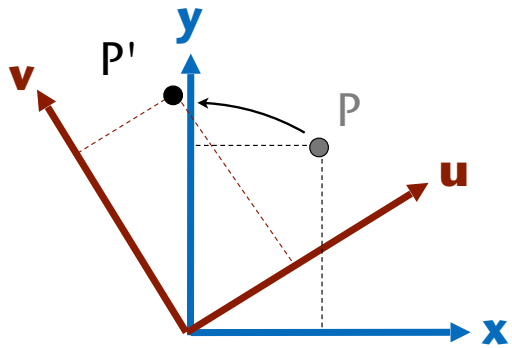
- Man kann eine Rotationsmatrix direkt aus den 3 Koordinatenachsen eines (neuen) Koordinatensystems konstruieren
- Gegeben: Einheitsvektoren **u, v, w**
- Setze:

$$R = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ | & | & | \end{pmatrix}$$



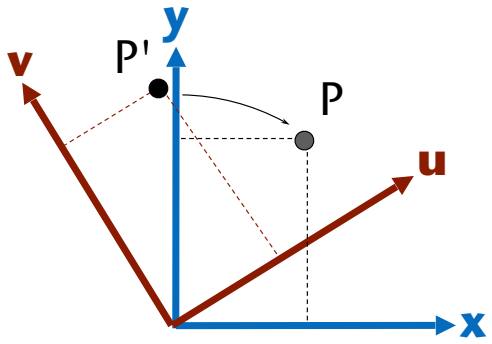
- Damit ist $R \cdot R^T = I$ und $\det(R) = 1$
- Also: R ist eine Rotation
- Und zwar von xyz-Koordinaten $\longrightarrow$ uvw, denn:

$$R \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{u}, \quad R \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{v}, \quad R \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{w}$$



- Was bedeutet die Matrix R^{-1} ?

➢ Rotation von uvw-Koord. → xyz-Koord.



- Beachte: bei dieser Betrachtungsweise sind die Koordinaten der Punkte (bzw. Ortsvektoren) **IMMER** im xyz-Koord.system gegeben!
  - Denn auch die Vektoren **u, v, w**, haben wir immer in xyz-Koord. definiert!

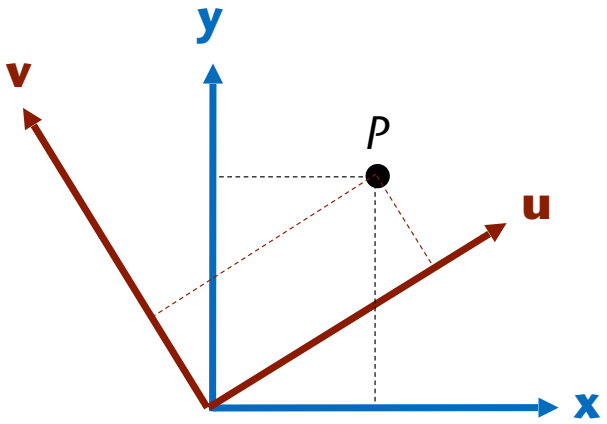
Zusammenhang zwischen Rotation und Basiswechsel

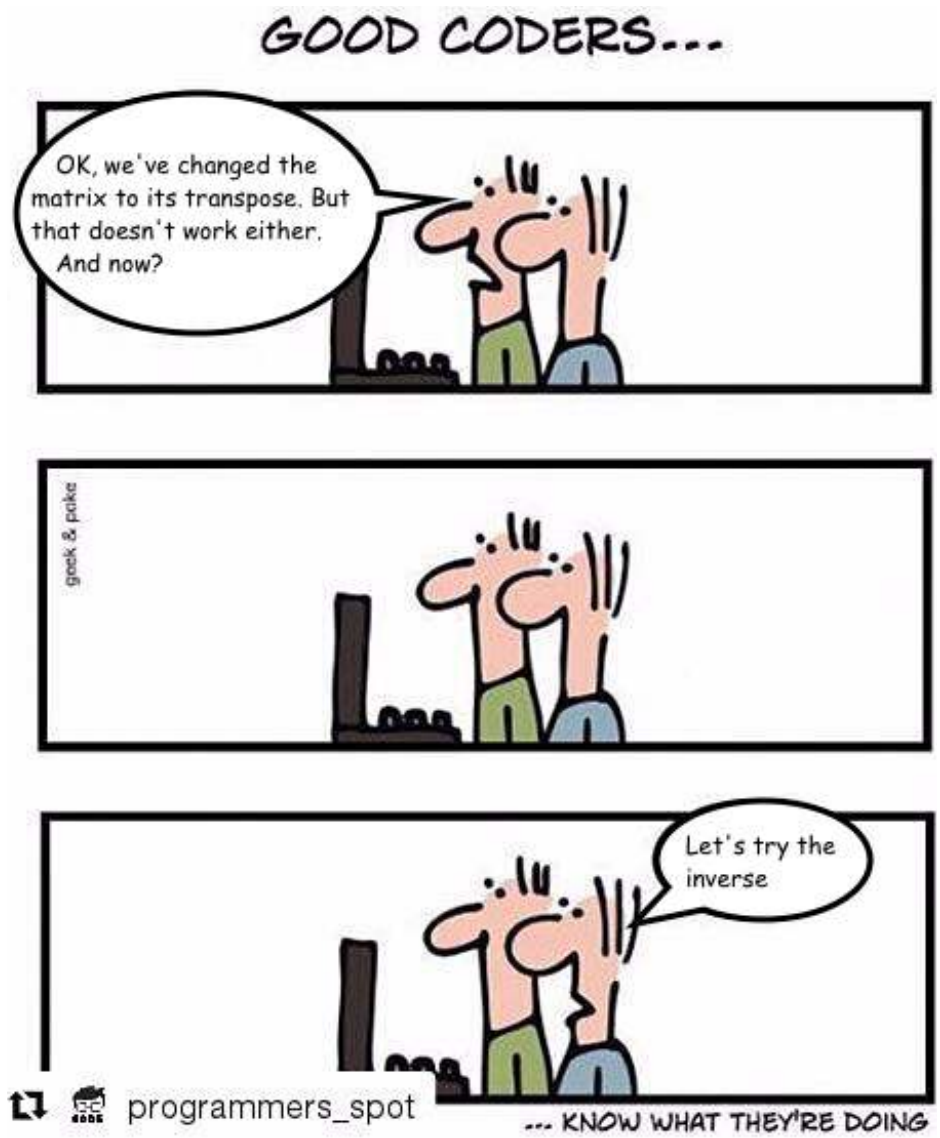
- Betrachte einen Punkt $P = \mathbf{p}_{xyz}$ im xyz-Koord.system und multipliziere mit R^T:

$$R^T \cdot P_{xyz} = R^T \cdot \mathbf{p}_{xyz} = \begin{pmatrix} - & \mathbf{u} & - \\ - & \mathbf{v} & - \\ - & \mathbf{w} & - \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p}_{xyz} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_{xyz} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_{xyz} \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{p}_{xyz} \end{pmatrix} = P_{uvw}$$

➢ P_{uvw} stellt den **selben** Punkt P im Raum wie P_{xyz} dar!

- $\mathbf{p}_{uvw}$ stellt ihn in uvw-Koordinaten dar, $\mathbf{p}_{xyz}$ stellt ihn in xyz-Koordinaten dar!




GOOD CODERS...
OK, we've changed the matrix to its transpose. But that doesn't work either. And now?
geek & poke
Let's try the inverse
programmers_spot
... KNOW WHAT THEY'RE DOING

Orthogonale Matrizen und der Zusammenhang zu Rotationen

- Definition (Wdhg aus Mathe):

  eine Matrix R heißt orthogonal $\Leftrightarrow$ $RR^T = R^T R = I$

- Folgen:

  Die Spalten von R sind zueinander *orthonormal* (nicht nur orthogonal)

  $\det(R) = \pm 1$

  $R^{-1} = R^{\mathsf{T}}$

  R^{T} ist orthogonal

  $\|Rv\| = \|v\|$ (Längenerhaltung)

  $(Ru)\cdot(Rv) = u\cdot v$ (Winkelerhaltung)

  R_1, R_2 sind orthogonal $\Rightarrow$ $R_1 R_2$ ist orthogonal

Charakterisierung von (reinen) Rotationsmatrizen

- R ist orthogonal ⇔ R ist Rotationsmatrix und/oder Spiegelung
- R ist eine ordentliche Rotation ⇔ $RR^{\mathsf{T}} = I \ \wedge \ \det(R) = +1$
- Die Menge der orthogonalen Matrizen mit Determinante =1 bezeichnet man oft mit SO(3) (aka. die *Gruppe der 3D Rotationen*, mit der Multiplikation als Operator)

Zerlegung einer Rotationsmatrix (Konvertierung von Matrix in Achse+Winkel)

FYI

- Gegeben: Rotationsmatrix R

1. Aufgabe: den Rotationswinkel θ bestimmen

- Lösung: $1 + 2\cos\theta = \text{spur}(R)$
- Beweis:
  - Zu R gibt es eine Basiswechselmatrix U, so daß

$$URU^{-1} = R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  - Es gilt: $\text{spur}(R) = \text{spur}\left(URU^{-1}\right) = \text{spur}\left(R_x(\theta)\right) = 1 + 2\cos\theta$

    (Spezielle Eigenschaft der Spur)

2. Aufgabe: Rotationsachse **r** bestimmen

FYI

- Lösung: **r** ist der Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix R
- Beweis: alle Vektoren auf der Rotationsachse bleiben fest, d.h. $R\mathbf{r} = 1 \cdot \mathbf{r}$
- Berechnung der Eigenvektoren einer 3x3-Matrix:
  - Zur Erinnerung: zu jeder Matrix A gibt es eine adjungierte Matrix $A^{\#}$
  - Die Elemente $a_{ij}^{\#}$ der adjungierten Matrix sind definiert als

$$a_{ij}^{\#} = (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots \\ \cdots & & \vdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots \\ \cdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

  - Es gilt: $AA^{\#} = \det(A)I$

- Falls $\det(A) = 0$, dann ist $AA^{\#} = 0 \cdot I = 0$

FYI

- Also gilt für jeden Spaltenvektor **v** aus $A^{\#}$, daß $A \cdot \mathbf{v} = 0$
- Gesucht: Eigenvektor **r** zum Eigenwert 1 von R, also ein **r**, so daß $(R - I) \cdot \mathbf{r} = 0$
- Das sind gerade die Spalten von $(R - I)^{\#}$

- Bemerkung: alle Spalten sind Vielfache voneinander
- Bemerkung: das funktioniert auch für größere Matrizen, ist aber nicht mehr effizient

Euler's Satz über Rotationen

Jede Rotation kann mit Hilfe 3-er Winkel um (fast) beliebige Achsen beschrieben werden.

Jede beliebige Rotation im Raum lässt sich als Rotation um eine bestimmte Achse mit einem bestimmten Winkel darstellen.

(Teil zwei haben wir gerade bewiesen. Teil eins führt zu Euler-Winkeln.)

Intermezzo: ein Film, in dem viele Interpolationen von Rotationen / Orientierungen vorkommen

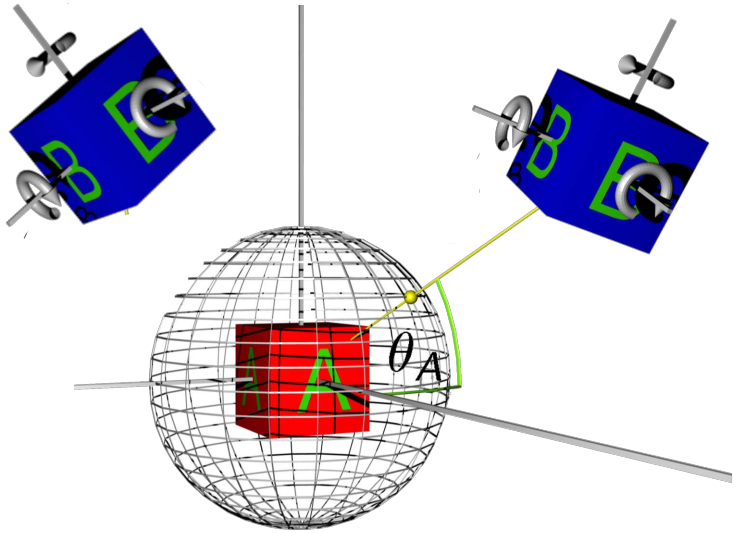
George Francis,
Louis Kauffman,
Dan Sandin, Chris Hartman,
John Hart

http://www.evl.uic.edu/hypercomplex/

Interpolation von Orientierungen

- Definition: Orientierung
  = "Lage" (*attitude/pose*) eines Obj.s im Raum
  = Rotation aus dessen Null-Lage

Punkt	Orientierung
Vektor	Rotation
Null-Element = (0,0,0)	Null-Element = Einheitsmatrix



- Häufige Aufgabe:
  - Gegeben: zwei Orientierungen O_1 und O_2 für dasselbe Objekt
  - Gesucht: eine Funktion $O(t)$ zur Interpolation zwischen O_1 und O_2 , die ästhetisch ansprechend und effizient ist
- Frage: welche Repräsentation ist dafür gut geeignet?

Vorbetrachtungen FYI

- Komplexe Zahlen kann man als Punkte in der Ebene betrachten
- Und als Rotation in der Ebene um den Ursprung !

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$v = re^{i\varphi} = r\cos\varphi + ri\sin\varphi$$

$$e^{i\theta}v = re^{i\theta}e^{i\varphi} = re^{i(\theta+\varphi)} = r\cos(\theta+\varphi) + ri\sin(\theta+\varphi)$$

Visualisierung: siehe Video auf der VL-Homepage unter *Videos*

FYI

- Wir können reelle Zahlen leicht invertieren: $x \cdot x^{-1} = 1$
- Auch für komplexe Zahlen können wir ein Inverses finden: $\frac{z \cdot z^*}{|z|^2} = 1$
- Gibt es etwas Analoges auch in "höheren Dimensionen"? $\longrightarrow$ Nein!
  - Z.B. eine "dreidimensionale" Verallgemeinerung von $\mathbb{C}$?
- Aber: im 4D klappt es wieder ... (fast)

Quaternionen

[Hamilton, 1843]

- Erweiterung der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{H} = \left\{ q \mid q = w + a\cdot\mathbf{i} + b\cdot\mathbf{j} + c\cdot\mathbf{k}\ ,\ \ w, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

- Alternative Schreibweise:

$$q = (w, \mathbf{v})$$

- Axiome für die 3 imaginären Einheiten:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

$$(\mathbf{ij})\mathbf{k} = \mathbf{i}(\mathbf{jk})$$

- Daraus folgen sofort diese Rechengesetze:

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

Eine Algebra über den Quaternionen

- Addition: $q_1 + q_2 = (w_1 + w_2) + (a_1 + a_2)\mathbf{i} + (b_1 + b_2)\mathbf{j} + (c_1 + c_2)\mathbf{k}$
- Skalierung: $s \cdot q = (sw) + (sa)\mathbf{i} + (sb)\mathbf{j} + (sc)\mathbf{k}$
- Multiplikation:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= (w_1 + a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}) \cdot (w_2 + a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}) \\ &= (w_1 w_2 - a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2) + \\ &\quad (w_1 a_2 + w_2 a_1 + b_1 c_2 - c_1 b_2)\,\mathbf{i} + \\ &\quad (\quad \ldots \quad \ldots \quad)\,\mathbf{j} + \\ &\quad (\quad \ldots \quad \ldots \quad)\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

- Konjugation: $q^* = w - a\mathbf{i} - b\mathbf{j} - c\mathbf{k}$
- Betrag (Norm): $|q|^2 = w^2 + a^2 + b^2 + c^2 = q \cdot q^*$
- Inverse eines Einheitsquaternions: $|q| = 1 \;\Rightarrow\; q^{-1} = q^*$

- Behauptung (o. Bew.):

  $\mathbb{H}$ mit der Multiplikation ist eine nicht-kommutative Gruppe.

- Bemerkung: manchmal ist es zweckmäßig, die Multiplikation zweier Quaternionen auch mit Hilfe einer Matrix-Multiplikation darzustellen

$$q_1 \cdot q_2 = \begin{pmatrix} w_1 & -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_1 & w_1 & -c_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 & w_1 & -a_1 \\ c_1 & -b_1 & a_1 & w_1 \end{pmatrix} q_2 = \begin{pmatrix} w_2 & -a_2 & -b_2 & -c_2 \\ a_2 & w_2 & c_2 & -b_2 \\ b_2 & -c_2 & w_2 & a_2 \\ c_2 & b_2 & -a_2 & w_2 \end{pmatrix} q_1$$

Als Spaltenvektor geschrieben!

Als Spaltenvektor!

Einbettung des 3D-Vektorraumes in $\mathbb{H}$

- Den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ kann man in $\mathbb{H}$ so einbetten:

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \;\mapsto\; q_v = (0, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}$$

- Definition:
  Quaternionen der Form $(0, \mathbf{v})$ heißen reine Quaternionen (*pure quaternions*)

Darstellung von Rotationen mittels Quaternionen

- Gegeben sei Axis & Angle $(\varphi, \mathbf{r})$ mit $\|\mathbf{r}\| = 1$
- Definiere das dazu gehörige Quaternion als

$$q = (\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\mathbf{r}) = (\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}r_x, \sin\frac{\varphi}{2}r_y, \sin\frac{\varphi}{2}r_z)$$

- Beobachtung: $|q| = 1$

- Zurückrechnen: $q = (w, a, b, c)$ sei gegeben, mit $|q| = 1$
  Dann ist

$$\varphi = 2\arccos(w) \qquad \mathbf{r} = \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- Satz:

  Jedes Einheitsquaternion kann man in der Form $\left(\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\mathbf{r}\right)$ darstellen.

- Beweis: siehe vorige Folie

- Theorem: Rotation mittels eines Quaternions
  Sei $\mathbf{v} \in \mathbb{H}$ ein pures Quaternion und $q \in \mathbb{H}$ ein Einheitsquaternion. Dann beschreibt die Abbildung

$$R : \mathbf{v} \mapsto q \cdot \mathbf{v} \cdot q^* = \mathbf{v}'$$

  eine (rechtshändige) Rotation von $\mathbf{v}$, wobei Winkel und Achse durch q bestimmt sind.

Beweisskizze

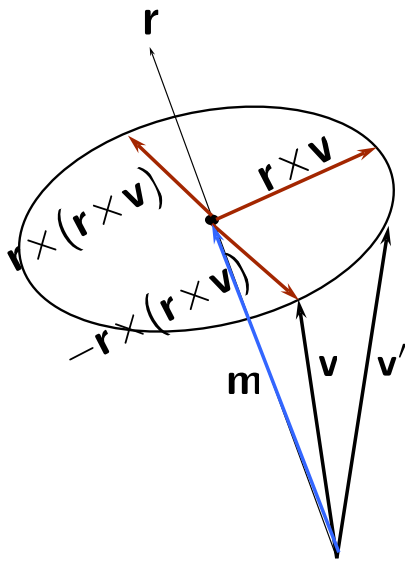
FYI

$$q\mathbf{v}q^* = (c, s\mathbf{r})\cdot(0, \mathbf{v})\cdot(c, -s\mathbf{r}) \qquad \text{mit} \quad c = \cos\frac{\varphi}{2},\ s = \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$= \ldots \text{ (*)}$$

$$= (\ 0,\ \underbrace{\mathbf{v} + \sin\varphi\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{v} + (1-\cos\varphi)\cdot\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{v})}_{\shortparallel}\ )$$

$$\underbrace{\mathbf{v} + \mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{v})}_{\mathbf{m}} + \sin\varphi\cdot\mathbf{r}\times\mathbf{v} + \cos\varphi\cdot(-\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{v})) = \mathbf{v}'$$



*) Zwischendurch benötigt man diese trigonometrischen Identitäten:

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \qquad 1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

- Bemerkung: die so definierte Rotationsabbildung ist mit der Quaternionen-Multiplikation verträglich, d.h., dass

$$R_{q_1}(R_{q_2}(\mathbf{v})) = R_{q_1 \cdot q_2}(\mathbf{v})$$

- Caveat: die beiden Einheits-Quaternionen $q = (w, x, y, z)$ und $-q = (-w, -x, -y, -z)$ stellen die selbe Rotation dar!
  - M.a.W.: die 4-dim. Einheitskugel in $\mathbb{H}$ deckt die Gruppe aller Rotationen, SO(3), doppelt ab!

Lineare Interpolation von Quaternionen

- Gegeben: zwei Orientierungen q_1 , q_2
- Aufgabe: Orientierungen dazwischen interpolieren
- Einfachste Lösung: linear interpolieren

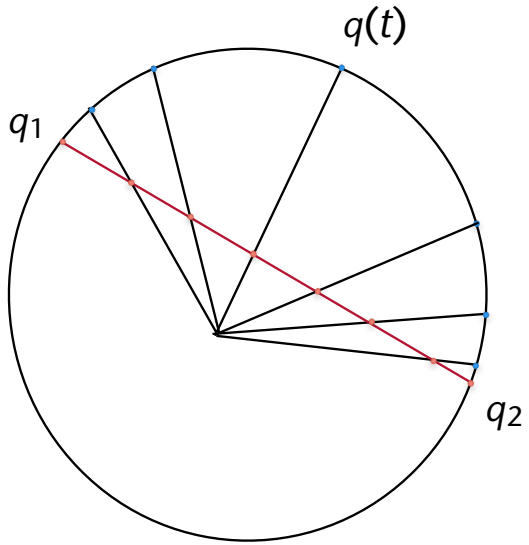
$$q(t) = (1-t)q_1 + tq_2 =: \mathrm{lerp}(t; q_1, q_2)$$

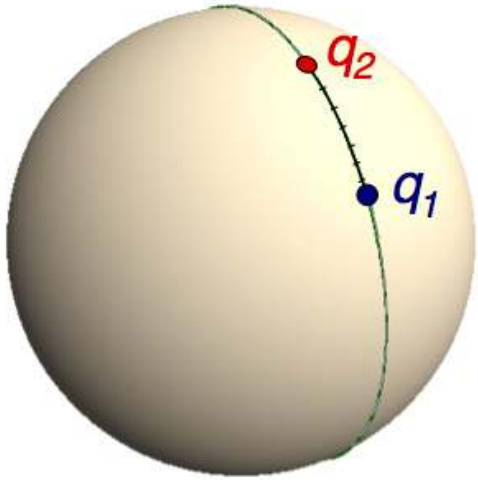
  - Wichtig: $q(t)$ hinterher immer normieren!

- Vorteil: Kein Gimbal Lock!

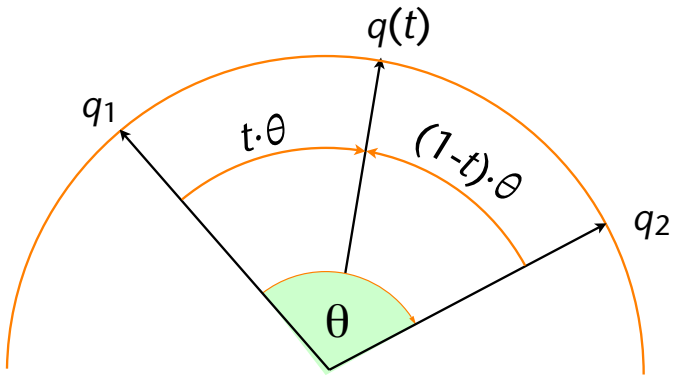
Sphärische lineare Interpolation

- Nachteil (noch): keine konstante Winkelgeschwindigkeit
- Problem: Geschwindigkeit an den "Enden" der Interpolation ist langsamer als in der "Mitte"





- Besser ist die sphärische lineare Interpolation “*slerp*”
  - Ansatz: interpoliere nicht die *Distanz* zwischen q_1 und q_2, sondern den *Winkel* dazwischen



  - $q(t) = \text{slerp}(t; q_1, q_2) = \dfrac{\sin((1-t)\theta)}{\sin\theta} q_1 + \dfrac{\sin(t\theta)}{\sin\theta} q_2$

mit $\cos\theta = q_1 \odot q_2$ Skalarprodukt der *Vektoren* q_1 und q_2

Nebenbemerkung

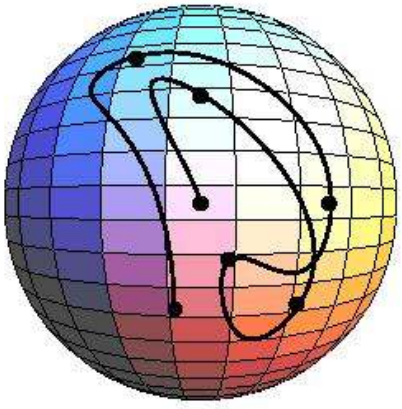
FYI

- In der Praxis interpoliert man die Quaternionen mit höherem Grad, mit irgend einem Standard-Interpolationsverfahren, das parametrische Kurven liefert
  - Z.B. Bezier-Kurven (oder B-Splines)
  - Mit De Casteljau geht das sehr einfach:
    - Statt

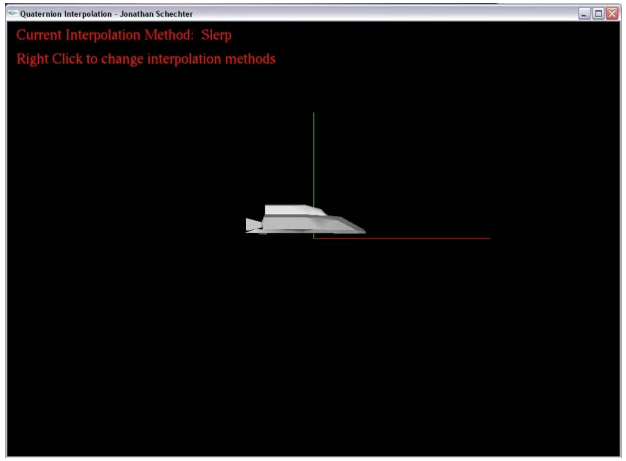
      $$Q_i = (1-t)P_i + tP_{i+1}$$

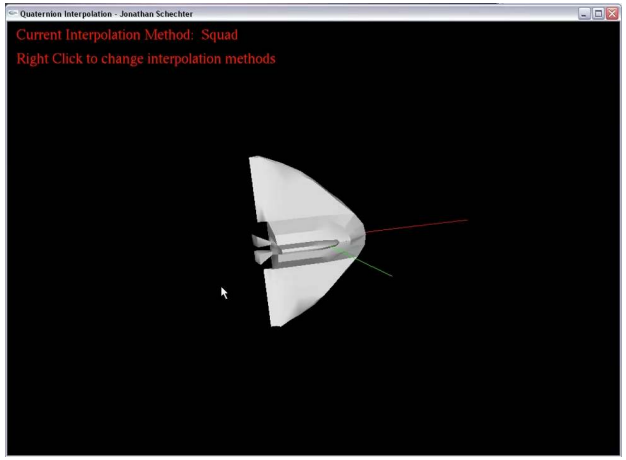
      berechne fortgesetzt

      $$Q_i = \text{slerp}(t; P_i, P_{i+1})$$



Lineare Interpolation mit slerp



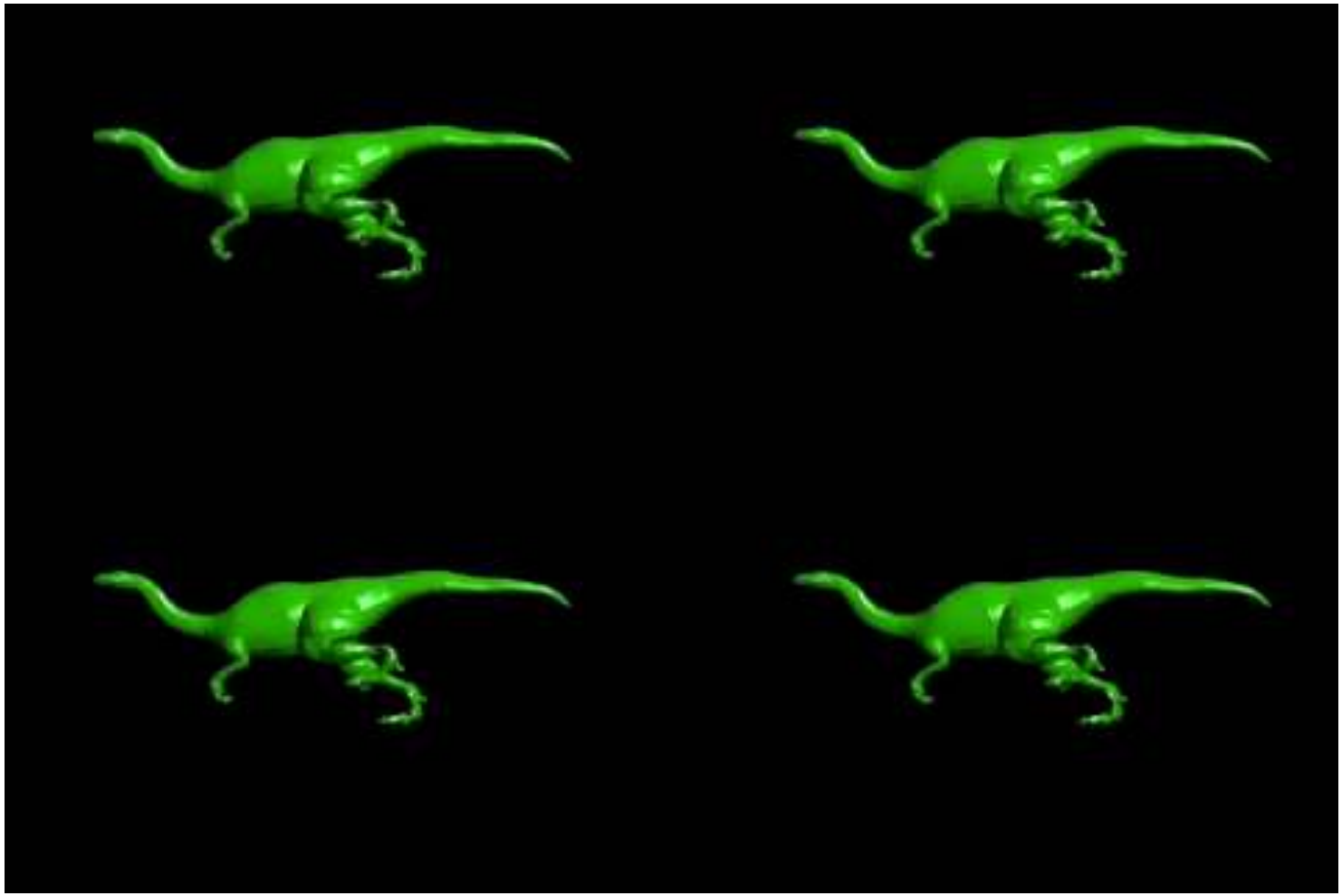


Kubische Interpolation mit slerp

Vergleich der verschiedenen linearen Interpolationsarten

Interpolation of Euler angles

Naïve interpolation of matrices

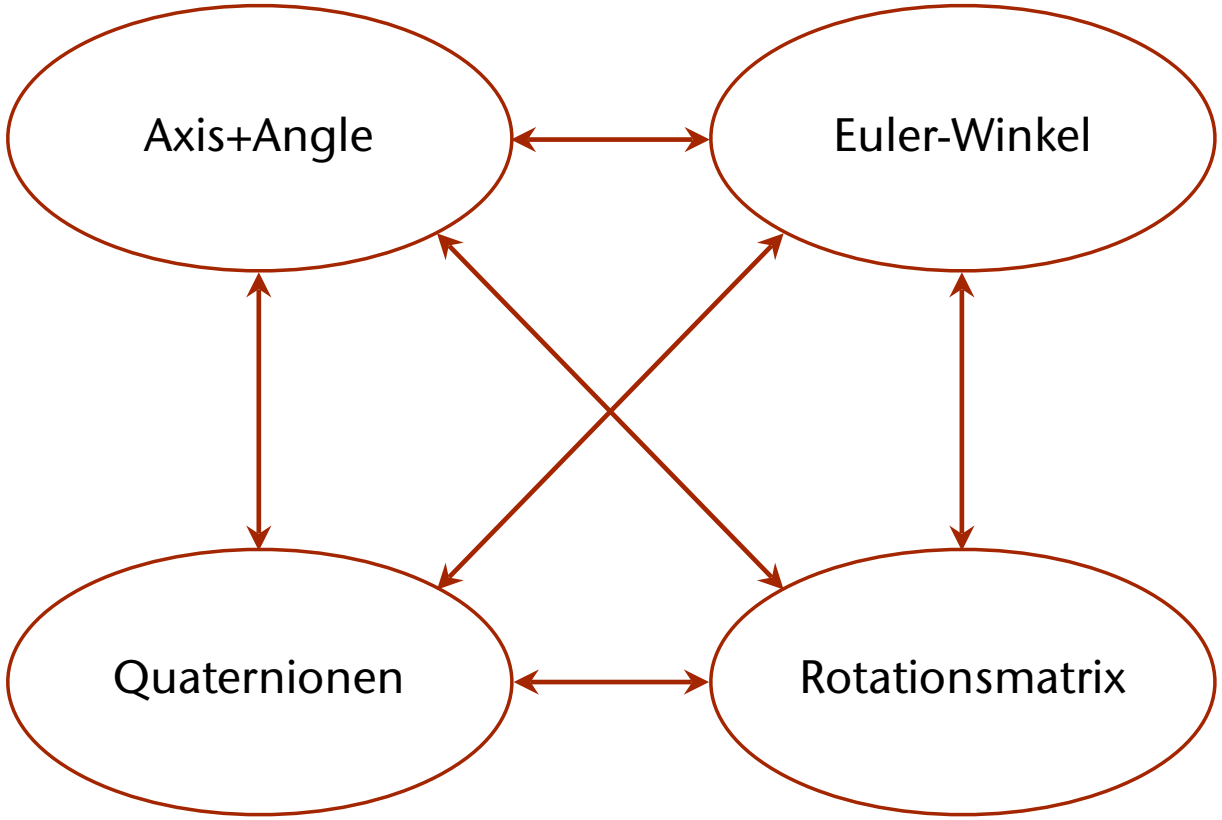


Slerp of quaternions

Lerp of quaternions (with normalization)

Gianluca Vatinno, Trinity College Dublin

Alle Darstellungen von Rotation lassen sich ineinander umrechnen



Mehr Infos: siehe die Tutorials auf der Homepage der Vorlesung!

Vergleich der verschiedenen Arten zur Darstellung von Rotationen

Matrix	Euler-Winkel
Quaternionen	**Achse+Winkel**

Vergleich der verschiedenen Arten zur Darstellung von Rotationen

Matrix	**Euler-Winkel**
o Ubiquitär in OpenGL / Game Engines - 16 Floats (evtl. 12) + Vektor rotieren = 15 FLOPs + Einheitliche Repräsentation für alle affinen Transformationen - Rundungsfehler nach mehrfacher Konkatenation lassen sich nicht leicht korrigieren - Konkat. von Rotationen = 45 FLOPs	+ Intuitiv (zunächst) + 3 Floats - Gimbal lock - keine Algebra (Rechenop.) darauf ⟶ Konkatenation fkt. nicht direkt
Quaternionen	**Achse+Winkel**
+ Intuitiv + 4 Floats + Rundungsfehler nach mehrfacher Konkatenation lassen sich leicht korrigieren (einfach normieren) + Konkat. von Rotationen = 28 FLOPs - Vektor rotieren = 30 FLOPs	+ Sehr intuitiv + 3 Floats - keine Algebra (Rechenop.) darauf - Vektor rotieren = 40 FLOPs

Anwendung: virtueller Trackball

- Interaktionsaufgabe: ein Objekt um eine beliebige Achse rotieren
- Mit echtem Trackball ist es trivial

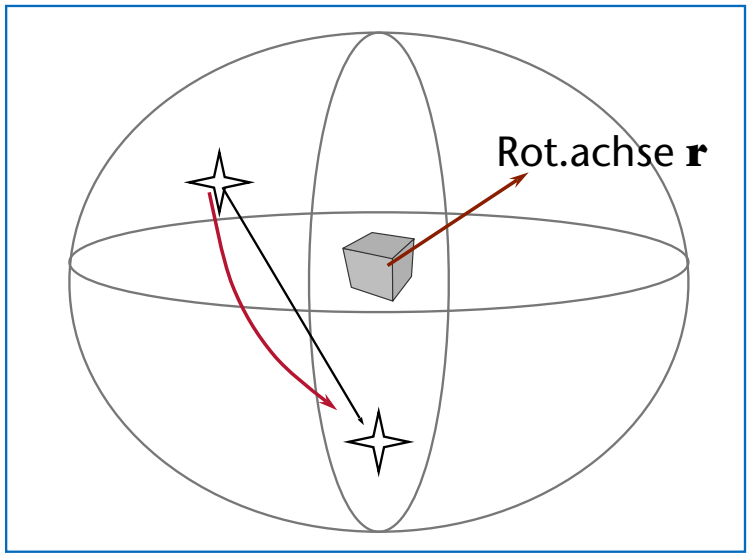
- Wie gibt man beliebige Rotationen mit der 2D-Maus ein?

Die Interaktionsmetapher

- Idee:
  - Lege gedachte (virtuelle) Kugel um das Objekt
  - Kugel kann um ihr Zentrum rotieren
  - Maus pickt Punkt auf Oberfläche, den man zieht
- Geg.: Startpunkt = (x_1,y_1), Endpunkt = (x_2,y_2) (in 2D!)
- Ges.: Rotationsachse $\mathbf{r}$ (in 3D), Rotationswinkel
- Berechnung:
  1. Bestimme 3D Punkte

$$\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i) \quad z_i = \sqrt{1-(x_i^2 + y_i^2)}$$

  2. Rotationsachse $\mathbf{r} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2$

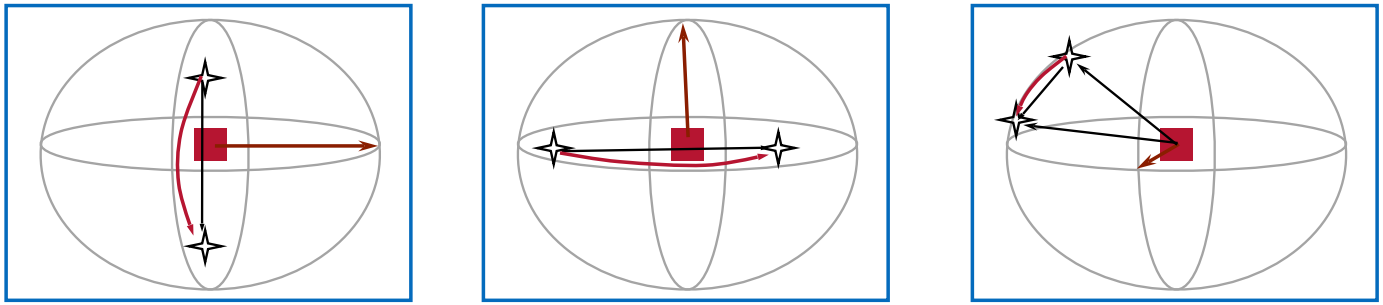


Gedachter Weg auf der Kugel = Segment des Großkreises

Weg der Maus im Fenster

Bemerkungen

- Variante 1: $\mathbf{p}_1$ = erster Mausklick, $\mathbf{p}_2$ = aktuelle Mausposition: unintuitiv
- Variante 2: $\mathbf{p}_1$ = Mausposition vom vorigen Frame, $\mathbf{p}_2$ = aktuelle Mausposition: intuitiv, aber Rotation exakt um Z-Achse unmöglich



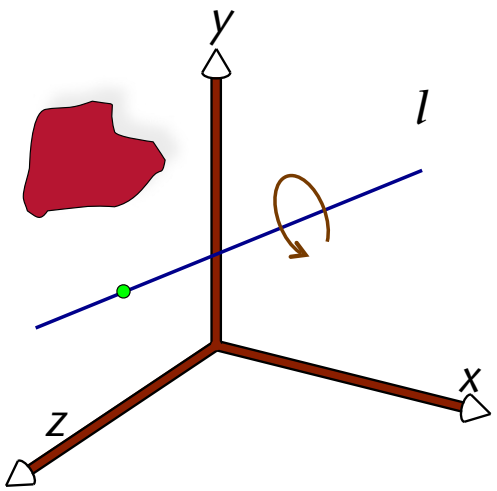
- Verbesserungen:
  - "Spinning trackball" vermeidet häufiges Nachfassen
  - "Snapping" für exaktes Rotieren um eine Koord.achse
  - Was macht man, wenn p2 die Ellipse verlässt? → andere 3D-Fläche verwenden, die an der Silhouette stetig anschließt

Bemerkungen

- Die Rotationsachse **r** ist zunächst im Kamera-Koordinatensystem definiert!
  - Sie muss aber nach Weltkoordinaten oder Obj.koordinaten zurückgerechnet werden (je nach dem, ob diese Rotation als letztes oder als erstes auf das Obj angewendet werden soll)
- Achtung: bei Variante 2 (inkrementeller Trackball) werden sehr viele Rotationen mit sehr kleinen Winkeln akkumuliert (pro Frame eine kleine Rotation) $\longrightarrow$ achte auf numerische Robustheit und Drift

Rotation um eine *beliebige* Achse im Raum

- Man möchte mit θ um die Gerade l rotieren, Gerade geht durch den *beliebigen* Punkt p



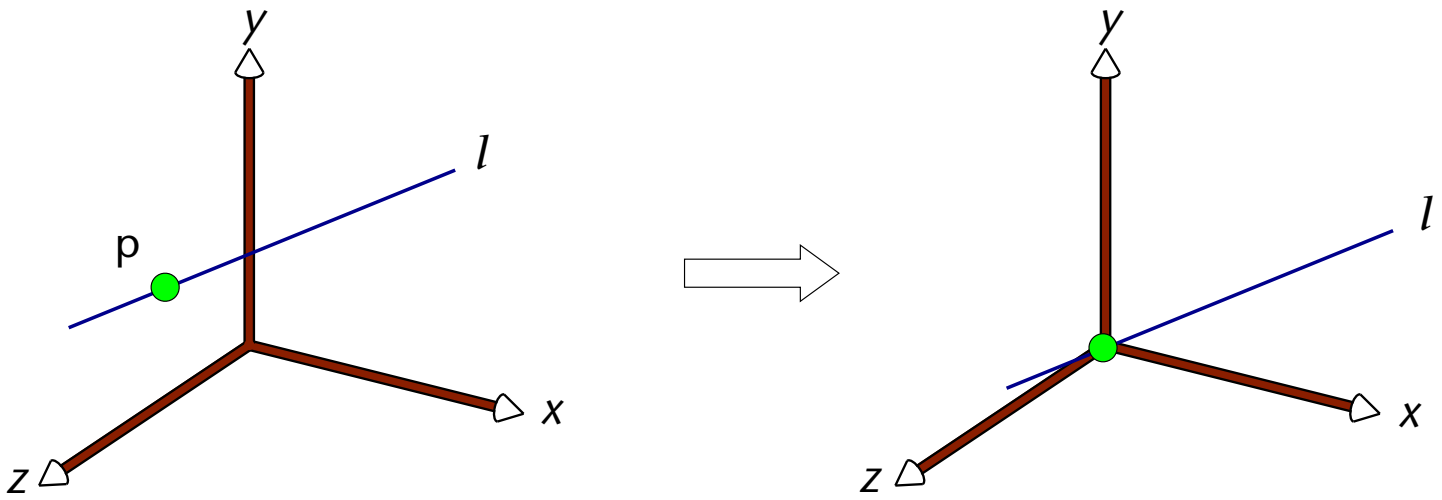
- Gesucht: eine Matrix *M*, die diese Transformation enthält
- Wir wissen, wie man um eine Koordinatenachse rotiert
- Somit müssen wir die Szene in eine Situation transformieren, mit der wir umgehen können

Grundidee

1. Verschiebe einen Punkt der Gerade in den Ursprung
2. Rotiere um eine Achse, so daß l in einer Koordinatenebene liegt
3. Rotiere um eine weiter Achse, so daß l auf einer Koordinatenachse liegt
4. Rotiere um diese Achse mit Winkel θ
5. Invertierte Rotation um die Koordinatenachse aus Schritt 3
6. Invertierte Rotation um die Koordinatenachse aus Schritt 2
7. Invertiere Verschiebung aus Schritt 1, so daß l wieder in Ausgangsposition

Schritt 1

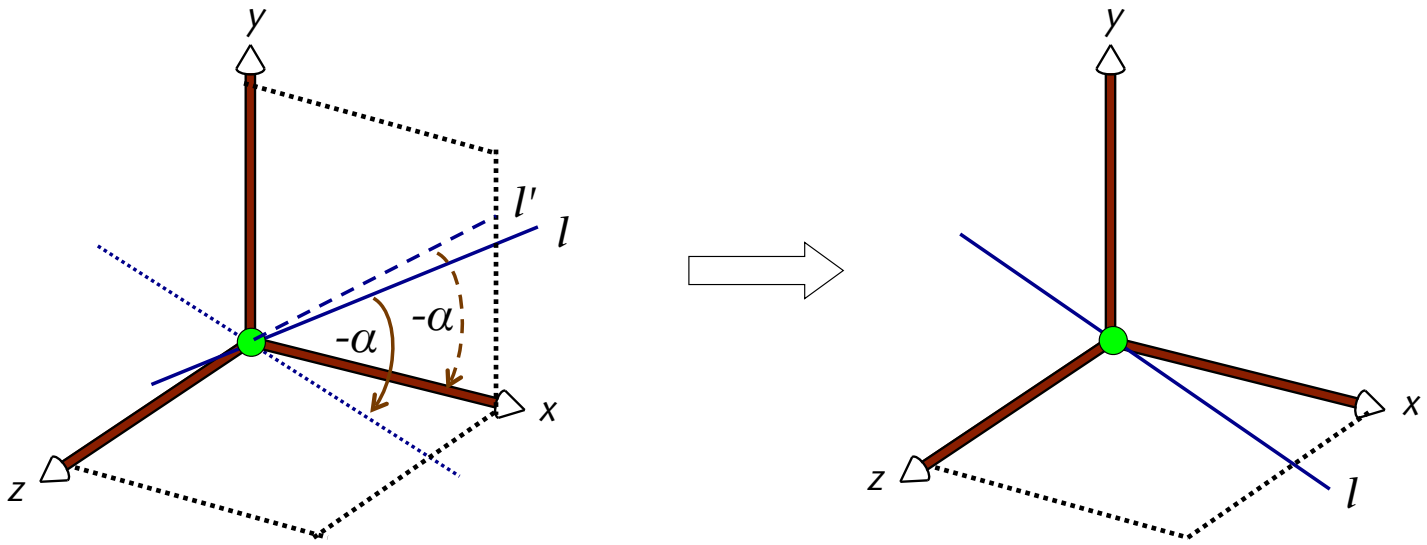
- Verschiebe Gerade, so daß ein Punkt von l im Ursprung liegt:



$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & 0 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 & -p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2

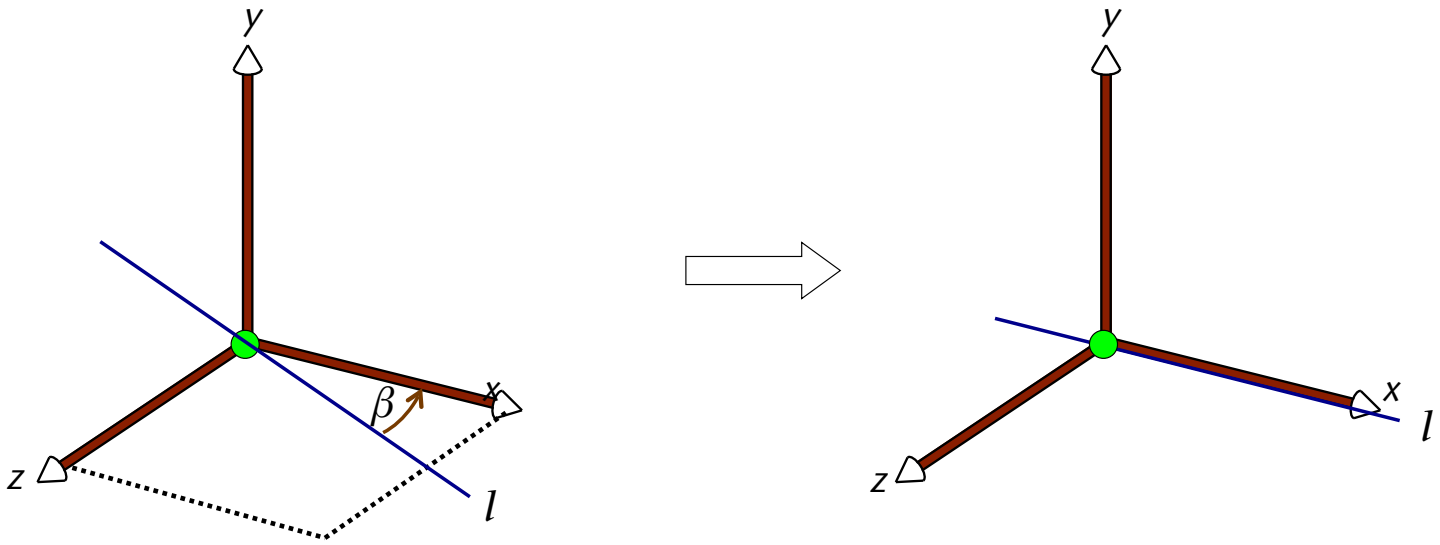
- Rotiere mit -α um die z-Achse, so daß l in der xz-Ebene liegt



$$R_z(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3

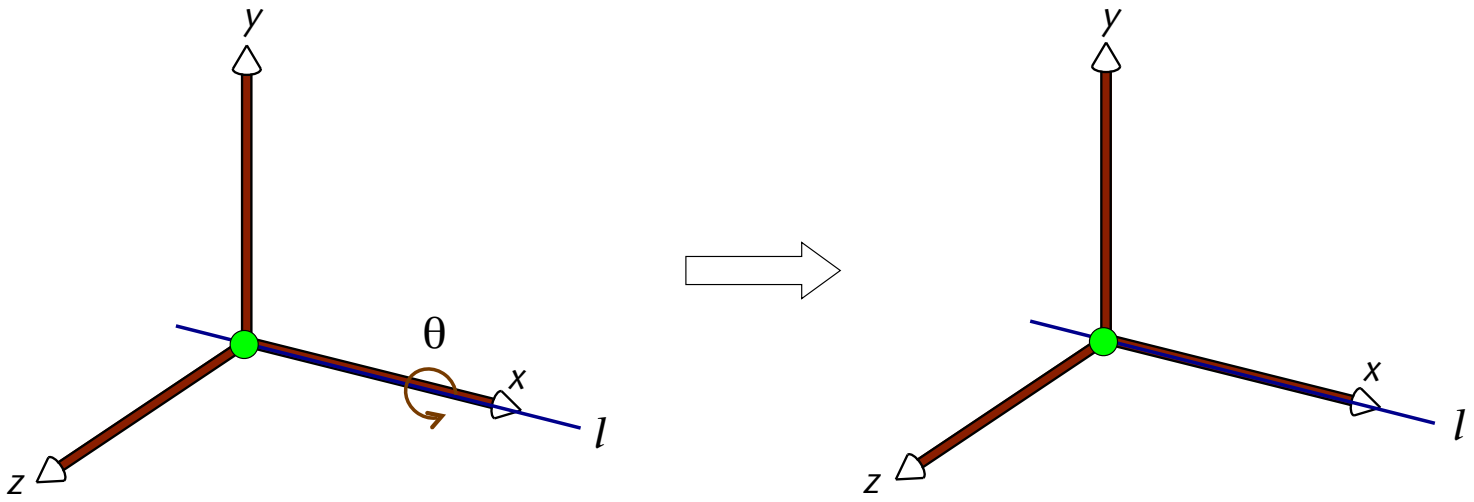
- Rotiere mit β um die *y*-Achse damit Gerade auf der *x*-Achse liegt



$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 4

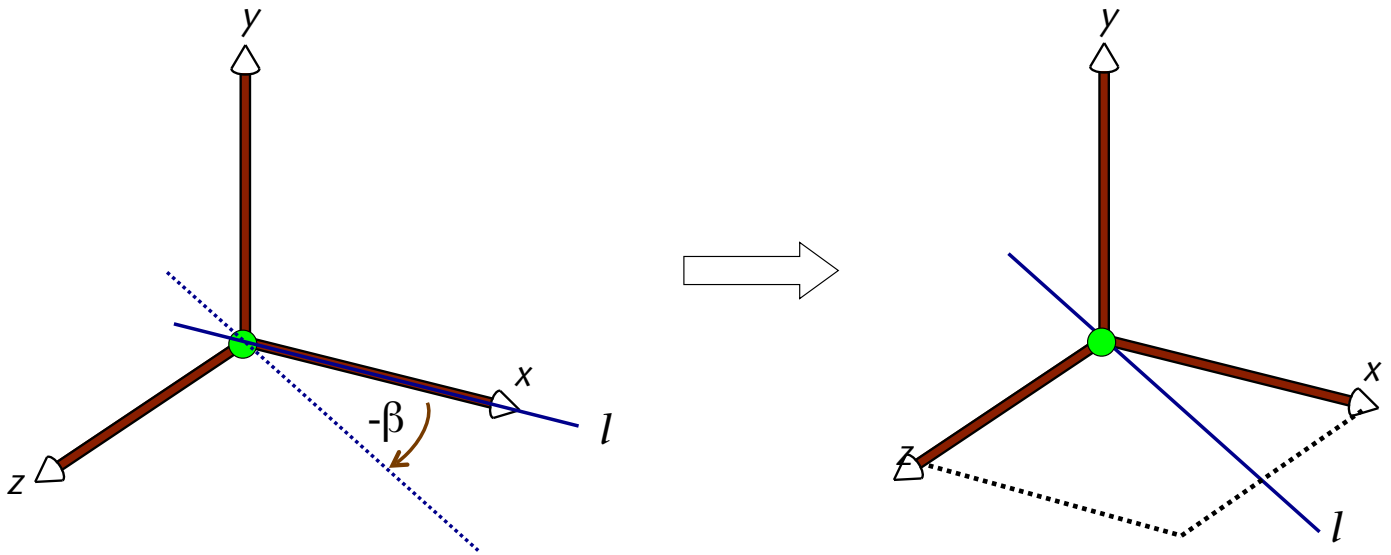
- Durchführen der gewünschten Rotation (rotiere mit θ um x-Achse)



$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 5

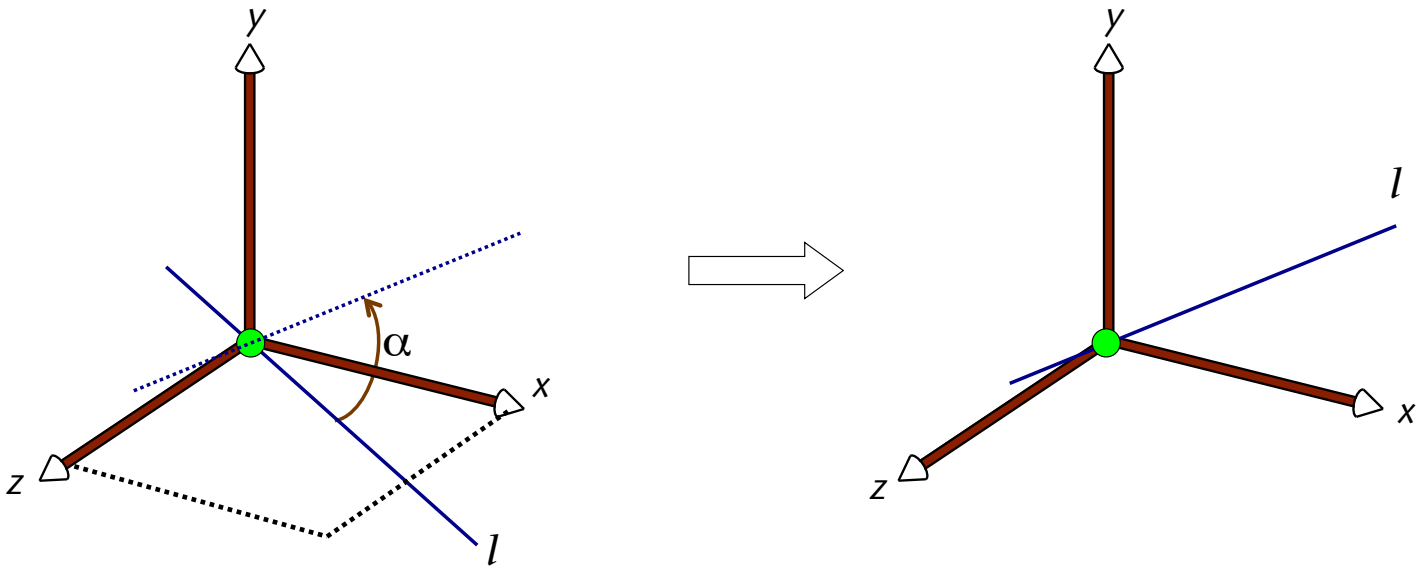
- Invertiere Rotation von l aus Schritt 3: rotiere mit -β um die y-Achse



$$R_y(-\beta) = \begin{pmatrix} \cos(-\beta) & 0 & \sin(-\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 6

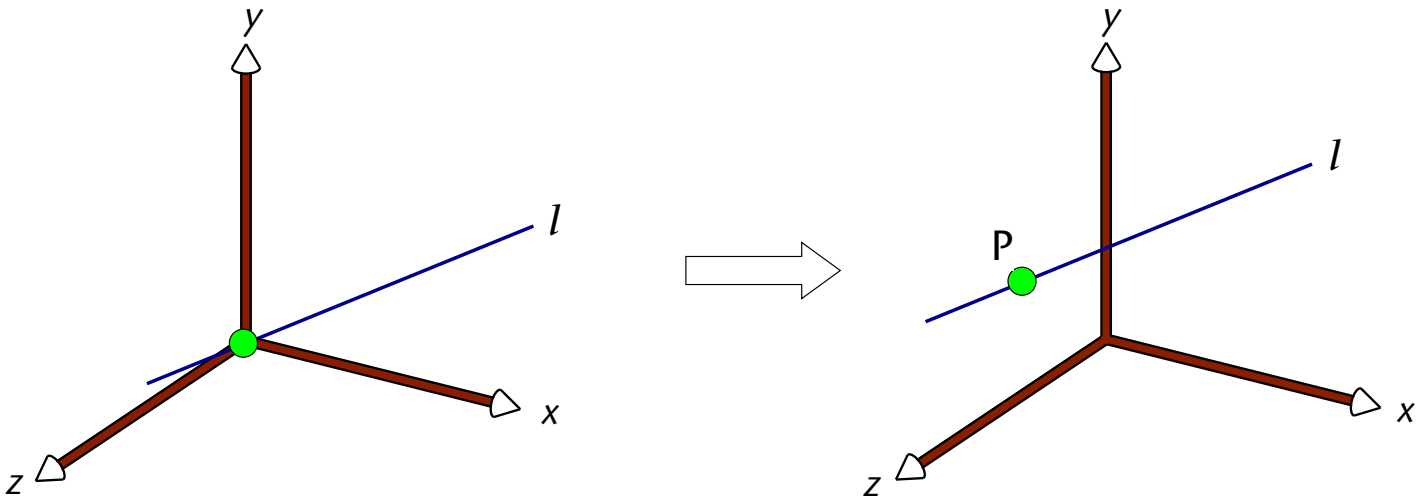
- Invertiere Rotation aus Schritt 2: rotiere mit α um z-Achse



$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 7

- Invertiere die Translation aus Schritt 1



$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung

- Die vollständige Transformation zum Rotieren um eine beliebige Achse ist:

$$R_{arb} = T_2\left(p_x, p_y, p_z\right) R_z\left(\alpha\right) R_y\left(-\beta\right) R_x\left(\theta\right) \cdot$$
$$R_y\left(\beta\right) R_z\left(-\alpha\right) T_1\left(-p_x, -p_y, -p_z\right)$$

  - (Es gibt auch andere Varianten)
- Hat man diese Matrix, so wendet man diese auf jeden Vertex des Objektes an, was den Effekt der Rotation dieses Objektes um die vorgegebene Achse hat
  - Das überläßt man natürlich dem Vertex-Shader